

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

6-дәріс. Ұйытқымаған орбиталарды анықтау

3.2 Екі дененің шектеулі есебі. Орбитаны анықтау

$$\vec{r}_0 = c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2,$$

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \quad (3.56)$$

Осы шектеулі орбита арқылы ұшып өту мерзімі

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)]. \quad (3.57)$$

Сонда Ламберт теоремасы

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{\frac{3}{2}} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin \varepsilon) - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)], \quad (3.58)$$

осында

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2}, \quad (3.59)$$

$$\Phi = \nu_2 - \nu_1, \quad (3.60)$$

Φ - $\vec{r}_{1,2}$ векторлар арасындағы бұрыш. Осы кезде $0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Егер $\vec{r}_{1,2}$ векторлар белгілі болса, $\sin \Phi$ және $\cos \Phi$ осы векторлардың векторлық және скалярлық көбейтіндісі арқылы анықталады. Сонда a - үлкен жарты осіне байланысты теңдеу ретінде қарастыруға және сан ретінде шешімін табуға болады.

a шамасы белгілі болса, орбита параметрін анықтауға болады

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin \frac{\varepsilon - \gamma}{2}}, \quad (3.61)$$

осында

$$\gamma = (\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \cdot \text{sign}(\sin \Phi) \cdot \delta). \quad (3.62)$$

Орбитаның векторлық элементтері

$$\vec{P} = \frac{e + \cos \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \sin \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}, \quad (3.63)$$

$$\vec{Q} = \frac{\sin \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \cos \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}. \quad (3.64)$$

Осы теңдеулерден $\vec{r}_{1,2}$ жою арқылы, Ω, ω, i элементтерді анықтауға болады. $\vec{P}$ мен $\vec{Q}$ векторларды жою арқылы $\vec{r}_2$ және $\dot{\vec{r}}_2$ анықтауға болады

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1 \quad (3.65)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{p r_1} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_1. \quad (3.66)$$

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.67)$$

$$\dot{\vec{r}} = \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{p r_0} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.68)$$

осында $\Phi = \nu - \nu_0$. Егер Ламберт теоремасында $a \rightarrow \infty$ кезінде шектеулі ауысу жасағанда Эйлер теоремасы пайда болады

$$6\sqrt{\mu}\Delta t = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - \text{sign}(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \quad (3.69)$$

Осы теорема Ольбертс әдісі бойынша парабодалық орбитаны анықтау кезінде қолданылады.

3.2 Гамильтон-Якоби әдісі арқылы екі дене есебін интегралдау

$$V = \mu / r$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.70)$$

$$L = T + V.$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (3.71)$$

Сонда Лагранж функциясы

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (3.72)$$

Осыдан

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2 \dot{\varphi}, \quad \Lambda = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \quad (3.73)$$

Консервативті есептерінде екі дене есебінің Гамильтон функциясы

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (3.74)$$

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \quad (3.75)$$

осында W - қисынды әрекет. Сонда Гамильтон-Якоби теңдеуі

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.76)$$

Енді осы теңдеудің жалпы интегралын табу үшін айнымалы шамаларын бөлеміз

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda) \quad (3.77)$$

және (3.76) теңдеуге енгізу арқылы

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W_3}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.78)$$

Егер

$$\frac{\partial W_3}{\partial \varphi} = \alpha_3 \text{ және } \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} = \alpha_2^2$$

болса

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.79)$$

Осыдан қисынды әрекет

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (3.80)$$

Есептің жалпы шешімі

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (3.81)$$

біздің жағдай үшін

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (3.83)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (3.84)$$

α_i, β_i - интегралдаудың алты тұрақтысы, Гамильтон –Якоби формасындағы екі дене есебінің жалпы шешімін береді және **Якоби элементтері** деп аталады.

$$\tan \varphi = \tan i \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \quad (3.85)$$

$$\sin \beta_3 \sin i \cdot x - \cos \beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0 \quad (3.86)$$

$$\sin \varphi = \sin i \sin u , \quad (3.87)$$

$$u = \omega + \nu$$

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = u - \beta_2 . \quad (3.88)$$

$$s = 1/r$$

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(u - \beta_2)}}. \quad (3.89)$$

Салыстыру арқылы Кеплер элементтерін анықтаймыз

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \quad \beta_2 = \omega, \quad (3.90)$$

осыдан

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \quad (3.91)$$

Қосымша есептеулер арқылы келесі элементтерді анықтаймыз

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i \quad \text{немесе} \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad (3.91)$$

және

$$\beta_1 = -\tau, \quad \Omega = \beta_3. \quad (3.91)$$

3.2 Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{r}^0, \quad (3.94)$$

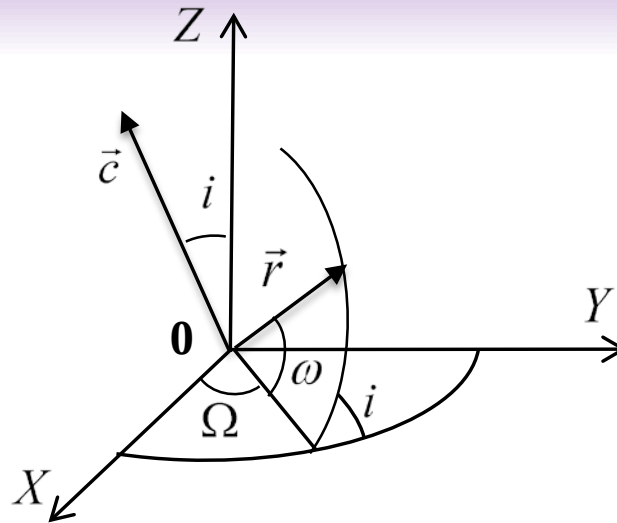
$\vec{r}^0$ - $\vec{r}$ радиус-вектордың орты, $F(r)$ - күш функциясы.

$$F = F(r, \dot{r}, t), \quad (3.95)$$

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t) \cdot \vec{r}^0 = 0 \quad (3.96)$$

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \quad (3.98)$$



Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

$$\vec{r} = r(t) \cdot \vec{r}^0(w(t)), \vec{r}^0 \equiv (\alpha(w(t)), \beta(w(t)), \gamma(w(t))). \quad (3.99)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\vec{r}}^0, \quad \ddot{\vec{r}} \equiv \ddot{r}\vec{r}^0 + 2\dot{r}\dot{\vec{r}}^0\dot{w} + r\ddot{\vec{r}}^0w'^2 + r\dot{\vec{r}}^0\ddot{w}. \quad (3.100)$$

Осында «штрих белгісі» w бойынша туынды. Сонда

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}_{\perp}^0, \quad \vec{r}^{0''} = -\vec{r}^0, \quad (3.101)$$

$\vec{r}_{\perp}^0$ - $\vec{r}^0$ ортына перпендикуляр, қозғалыс жазықтығындағы орт.

Осы теңдеулерді бір біріне енгізу арқылы

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_{\perp}^0 = 0. \quad (3.102)$$

$\vec{r}^0$ және $\vec{r}_{\perp}^0$ бір бірінен сызықты тәуелсіз болғандықтан

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 &= F, \\ r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Сонда

$$r^2 \dot{w} = c. \quad (3.104)$$

r радиус үшін теңдеу

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t) \quad (3.105)$$

және қозғалыс заңы

$$w = w_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)} = 0. \quad (3.106)$$

Егер F функциясы t уақытқа тәуелсіз болса, w - жаңа аргументке ауысу
кажет. Осымен қатар, бейсызық құраушысын $r = \frac{1}{u}$ тәуелді шамасымен
алмастыруға болады.

$\dot{r}$ және $\ddot{r}$ туындылары

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2 u^2 u'', \quad (3.107)$$

және осы теңдеуді (3.105) теңдеуіне енгізгенде, u кері арақашықтығы үшін
теңдеуін аламыз

$$u'' + u = -\frac{1}{c^2 u^2} F\left(\frac{1}{u'} - cu'\right). \quad (3.108)$$

Бұл теңдеу – *Бине теңдеуі*.

$$p \frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2 u^2} F(u) \equiv \Phi(u). \quad (3.109)$$

Осы теңдеудің айнымалы шамалары бөлінеді, интегралдау арқылы

$$p^2 = p_0^2 - u^2 + u_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \Phi(u) du. \quad (3.110)$$

$p(u) = u'$ теңдеуді шешу арқылы

$$w = w_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{p(u)} \quad (3.111)$$

және (3.104) теңдеуін қолдану арқылы келесі тәуелділікті анықтаймыз

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{u^2(w)} = s(t - t_0). \quad (3.112)$$

Осы теңдеу – орталық күш әрекетінен пайда болатын қозғалыс есебінің жалпы шешімі.

$$r = \frac{1}{u}$$

$$F(r) = \frac{dU}{dr}. \quad (3.113)$$

$$c^2 u'^2 + c^2 u^2 = 2U + h. \quad (3.114)$$

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2 = 2U + h. \quad (3.115)$$

$$F = -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2, \quad (3.116)$$

Сонда

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(w + \omega), \quad (3.117)$$

осында $A = \frac{e\mu}{c^2}$, $\frac{\mu}{c^2} = p$ кеплер орбитасының белгілі теңдеуін аламыз

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(w - \omega)}. \quad (3.118)$$